ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THÀNH TRUNG

CHẶN ĐỀU CHỈ SỐ KHẢ QUY CHO IĐÊAN THAM SỐ CỦA MÔĐUN HỮU HẠN SINH TRÊN VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

Ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Trần Đỗ Minh Châu

THÁI NGUYÊN - 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là không bị trùng lặp với các luận văn trước đây. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là các nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Thành Trung

LỜI CẢM ƠN

Luận văn "Chặn đều chỉ số khả quy cho Iđêan tham số của môđun hữu hạn sinh trên vành Noether địa phương" được hoàn thành sau thời gian 2 năm học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Với lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới cô giáo của tôi - TS. Trần Đỗ Minh Châu, người cô kính mến đã hết lòng giúp đỡ, dạy bảo, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, lãnh đạo khoa Toán, lãnh đạo khoa Sau đại học của Trường đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy cho lớp Cao học chuyên ngành Toán khóa 25.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn những người thân yêu trong gia đình, bạn bè đã luôn cho tôi niềm tin và động lực để học tập và nghiên cứu thật tốt.

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Giả sử $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M và $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)$. Cho $\underline{n} = (n_1 \ldots, n_d)$ là bộ gồm d số nguyên dương và $\underline{x}^{\underline{n}} = x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$. Ta xem hiệu

$$I_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \ell(M/\underline{x}^{\underline{n}}M) - e(\underline{x}^{\underline{n}}; M)$$

như một hàm theo biến $\underline{n}$ trong đó $e(\underline{x}; M)$ là số bội của M ứng với dãy $\underline{x}$. Mặc dù $I_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ không là đa thức với $n_1, \ldots, n_d$ đủ lớn nhưng nó bị chặn trên bởi các đa thức. Trong [7], N. T. Cường đã chứng minh được bậc bé nhất của tất cả các đa thức theo biến $\underline{n}$ chặn trên $I_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ là không phụ thuộc vào việc chọn $\underline{x}$. Bậc này được gọi là *kiểu đa thức* của M, kí hiệu là $p(M)$. Chú ý rằng M là môđun Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $\ell(M/\mathfrak{q}M) = e(\mathfrak{q}; M)$, với một (và do đó với mọi) iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Vì thế nếu ta quy ước bậc của đa thức 0 là -1 thì M là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $p(M) = -1$. Để mở rộng lớp môđun Cohen-Macaulay, J. Stuckrad và W. Vogel đã giới thiệu lớp môđun Buchsbaum. Một R-môđun M được gọi là *Buchsbaum* nếu và chỉ nếu với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$, hiệu $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ là không đổi. Sau đó, N. T. Cường, P. Schenzel và N. V. Trung [9] đã giới thiệu lớp môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Môđun M là *Cohen-Macaulay suy rộng* nếu và chỉ nếu hiệu $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ bị chặn trên với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Dễ dàng thấy rằng M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng nếu và chỉ nếu $p(M) \leq 0$. Cho đến nay vẫn còn rất ít thông tin về cấu trúc của M khi $p(M) > 0$.

Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M. Số thành phần bất khả quy xuất hiện trong một phân tích bất khả quy thu gọn của $\mathfrak{q}\, M$ được gọi là *chỉ số khả quy* của $\mathfrak{q}$ trong M và kí hiệu là $\mathrm{ir}_M(\mathfrak{q}\, M)$. Chú ý rằng ta luôn có $\mathrm{ir}_M(\mathfrak{q}\, M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathrm{Soc}(M/\mathfrak{q}\, M)$, trong đó với mỗi R-môđun N tùy ý, $\mathrm{Soc}(N) = (0 :_N \mathfrak{m})$. Một kết quả cổ điển của D. G. Northcott phát biểu rằng chỉ số khả quy của các iđêan tham số đối với môđun Cohen-Macaulay là một bất biến của môđun M. Trong [11], S. Endo và M. Narita đã đưa ra ví dụ chứng tỏ chiều ngược lại là không đúng. Khi M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng, S. Goto và N. Suzuki [13] đã chứng minh rằng $\mathrm{ir}_M(\mathfrak{q}\, M)$ có chặn trên cho bởi công thức

$$\mathrm{ir}_M(\mathfrak{q}\, M) \leq \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} \ell_R(H^j_{\mathfrak{m}}(M)) + \dim_k \mathrm{Soc}\, H^d_{\mathfrak{m}}(M)$$

với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Trong trường hợp M là môđun Buchsbaum, S. Goto và H. Sakurai [12] đã chứng minh dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ nằm trong lũy thừa đủ lớn của $\mathfrak{m}$. Tiếp theo, N. T. Cường và H. L. Trường [10] đã mở rộng kết quả của Goto, H. Sakurai cho trường hợp môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Gần đây, N. T. Cường và P. H. Quý đã sử dụng kỹ thuật chẻ ra của đối đồng điều địa phương để chứng minh lại kết quả này.

Mục đích của luận văn là trình bày lại kết quả của P. H. Quý trong bài báo *"On the uniform bound of the index of reducibility of parameter* *ideals of a module whose polynomial type is at most one"*. Kết quả khẳng định nếu M là R-môđun hữu hạn sinh sao cho $p(M) \leq 1$ thì $\mathrm{ir}_M(\mathfrak{q}M)$ bị chặn trên với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn gồm 2 chương.

Chương 1 trình bày các khái niệm cơ bản của môđun hữu hạn sinh gồm chiều, độ sâu và số bội; khái niệm và tính chất của Đối ngẫu Matlis, môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại và kiểu đa thức.

Chương 2 trình bày khái niệm chỉ số khả quy, chặn đều số phần tử sinh tối tiểu của môđun con trong trường hợp chiều 1 và chặn đều chỉ số khả quy trong trường hợp $p(M) \leq 1$.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt luận văn này, ta luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương, M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d, L là R-môđun tùy ý không nhất thiết hữu hạn sinh.

1.1. Chiều, hệ tham số và số bội của môđun hữu hạn sinh

Mục đích của tiết này là nhắc lại khái niệm và một số kết quả về các bất biến của R-môđun hữa hạn sinh M gồm chiều, độ sâu và số bội ứng với một hệ tham số.

Định nghĩa 1.1.1. Ta nói dãy các iđêan nguyên tố $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_n$ của R có *độ dài n* nếu $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_{i+1}$ với mọi i. *Chiều Krull* của vành R là cận trên đúng của tất cả độ dài của dãy các iđêan nguyên tố trong R. Chiều Krull của R được kí hiệu là $\dim R$.

Ví dụ 1.1.2. (i) Cho k là một trường. Vành các đa thức vô hạn biến $R = k[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ có chiều là ∞ vì xích các iđêan nguyên tố

$$(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \ldots \subset (X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset \ldots$$

tăng vô hạn.

(ii) Nếu R là vành Artin thì $\dim R = 0$, vì mỗi iđêan nguyên tố của R đều là một iđêan cực đại. Đặc biệt, mỗi trường đều có chiều bằng 0.

(iii) Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ có $\dim \mathbb{Z} = 1$, vì 0 là một iđêan nguyên tố, còn mọi iđêan nguyên tố khác không là cực đại và có dạng $p\mathbb{Z}$ với p là số nguyên tố.

Định nghĩa 1.1.3. *Chiều Krull* của M, kí hiệu là $\dim M$, là chiều Krull của vành $R/\operatorname{Ann}_R(M)$.

Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại một phần tử $m \in M$ sao cho $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(m)$. Tập các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\operatorname{Ass}_R M$.

Chú ý rằng iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ nếu và chỉ nếu M chứa một môđun con đẳng cấu với $R/\mathfrak{p}$. Hơn nữa, tập các iđêan nguyên tố tối tiểu chứa $\operatorname{Ann}_R M$ và tập các iđêan tối tiểu của $\operatorname{Ass}_R M$ là bằng nhau. Vì thế ta có công thức tính $\dim M$ qua chiều của các iđêan nguyên tố liên kết của M như sau.

Bổ đề 1.1.4.

$$\dim M = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M\}.$$

Cho $I \neq R$ là iđêan của R. Ta nói rằng I là *iđêan nguyên sơ* nếu $ab \in I$ và $a \notin I$ kéo theo $b \in \sqrt{I}$ với mọi $a, b \in R$. Chú ý rằng nếu I là iđêan nguyên sơ thì $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ là iđêan nguyên tố. Trong trường hợp này ta nói I là iđêan $\mathfrak{p}$-nguyên sơ.

Cho L là R-môđun không nhất thiết hữu hạn sinh. Dãy $0 = L_0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq L_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq L_t = L$ (*) trong đó mỗi L_i là môđun con của L được gọi là *dãy môđun con độ dài t*. Ta nói L có *dãy hợp thành* nếu tồn tại dãy (*) mà giữa L_i và L_{i+1} không thể thêm một môđun con nào khác, với mọi $i = 0, \ldots, t-1$. Nếu L có dãy hợp thành thì mọi dãy môđun con không